Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Sistemi lineari

Un sistema lineare di m-equazioni e n-incognite è un'espressione della forma

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \_\_\_\_ \quad + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Trovare soluzione di (S) significa trovare una n-upla $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ che soddisfi ogni eq.ne del sistema

Consideriamo la matrice associata a (S)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad m \times n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \end{pmatrix}$$

Se considero $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $n \times 1$

e con

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad m \times 1$$

Usando la definizione di prodotto tra matrici, il sistema (S) può essere riscritto in termini matriciali

$$\boxed{A \cdot X = B}$$

Un'altro elemento importante per lo studio di (S) è la <u>matrice completa</u> associata ad (S)

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \text{—} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & & a_{2n} & b_2 \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

<u>Teorema</u> (Rouché - Capelli)

Sia (S) un sistema di equazioni lineari con matrice associata A e matrice completa A'. Allora

(1) (S) ammette soluzioni $\Longleftrightarrow$ rango A = rango A'

(2) (S) ammette unica soluzione $\Longleftrightarrow$ rango A = rango A' $= n$

(uguale al numero delle incognite)

(3) se rango A = rango A' $= r < n$

$\Longrightarrow$ il sistema (S) ammette ∞^{n-r} soluzioni

Come calcolare le soluzioni di (S) ?

Metodo di Cramer

Caso particolare $n = m$

Ossia A è matrice quadrata di ordine n

quindi ha senso parlare di $\det A$.

Da qui, se $\boxed{\det A \neq 0}$ $(n = \text{rango } A = \text{rango } A')$

da Rouché - Capelli

$\Longrightarrow$ (S) ha unica soluzione

$\forall i = 1, 2, \ldots n$ definiamo una matrice da A come

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Da qui la soluzione di (S) è data dalla formula

$$\boxed{\bar{x}_i = \frac{\det A_i}{\det A}}$$

Se il numero di equazioni non coincide col numero delle incognite

A è una matrice rettangolare $m \times n$ $(m \neq n)$

non si può più parlare di determinante

<u>caso 1</u>

Se rango $A \lneq$ rango A' $\Rightarrow$ $\nexists$ sol a (S)

<u>caso 2</u>

Se rango A = rango $A' = n$ $\Rightarrow$ unica soluzione

In questo caso si considera un minore di ordine n della matrice A con $\det \neq 0$

Supponiamo, per semplicità, che tale minore sia

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \cdots & a_{n+1\,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{matrix}$$

In tal caso si considera il nuovo sistema (escludendo le ultime equazioni di (S))

$$(S') \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \quad + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \begin{matrix} n \text{ eqn.} \\ n \text{ incognite} \end{matrix}$$

Tramite Cramer trovo la soluzione di (S') e si prova che essa è l'unica soluzione di (S)

<u>Caso 3</u> $\quad \text{rango } A = \text{rango } A' = r < n$

Considero un minore di ordine r della matrice A con $\det \neq 0$

Per semplicità, suppongo che tale minore sia

Per semplicità, suppongo che tale minore sia

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & & a_{rr} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{matrix} a_{1n} \\ \\ a_{rn} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \cdots & a_{r+1\,r} & a_{r+1\,r+1} & \cdots & a_{r+1\,n} \\ \cdots & & & & & & \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mr} & a_{m\,r+1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Considero il nuovo sistema

$$(S') \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - (a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n) \end{cases}$$

lo studio con Cramer come se il 2° membro fosse costante

$\Rightarrow \quad \overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_r}$

tali soluzioni dipendono dalle incognite $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$

Per tale motivo si parlerà di ∞^{n-r} soluzioni

Esercizio

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+3z=1 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-2-3) - (4-9) - (2+3)$$

$$= -10 - 4 + 9 = -5 \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{3 = \text{rango } A = \text{rango } A'}$$

In generale ricorda che rango $A \leq$ rango A'

(RC)

$\Rightarrow$ Unica sol

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A_1 = 2\det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0$$

$$= 2(-1-3) - (1+1)$$

$$= -8 - 2 = -10$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A_2 = -2 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -2(4-9) + (2+3) =$$

$$10 + 5 = 15$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}_2 = \frac{15}{-5} = -3$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A_3 = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2(2+3) - (1-3) =$$

$$= 10 + 2 = 12$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x}_3 = \frac{12}{-5}$$

VETTORI

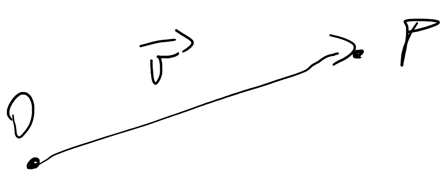
Tutte le grandezze per cui la definizione non concorrono altri elementi al di fuori della concorrono altri elementi al di fuori della loro misura si dicono <u>grandezze scalari</u>

Tuttavia, ci sono grandezze per le quali non è sufficiente una sola quantità per poterle descrivere (es. lo spostamento)

In tal caso si parlerà di <u>grandezze vettoriali</u>, o di vettori

Per poter identificare un vettore necessitano di un <u>modulo</u> (ossia un numero positivo) di un <u>verso</u> e di una <u>direzione</u>

Nel piano, per poter identificare un vettore mi basta fissare due punti del piano (<u>punto iniziale</u> e punto finale)



$|\vec{v}|$ = distanza (O, P)

verso $\vec{v}$ = da punto O al punto P

direzione $\vec{v}$ = retta che congiunge i punti OP

Caso particolare vettore con modulo $= 1$ è detto versore

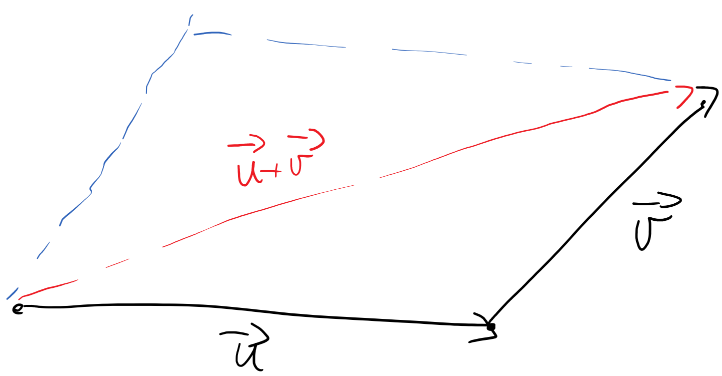
Nota che la traslazione di un vettore mi restituisca lo stesso vettore

Operazioni

(1) sia $m \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}$ vettore. Definiamo

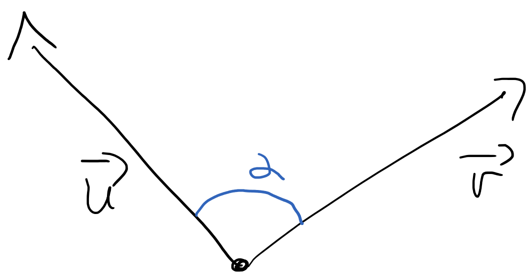
$$m \cdot \vec{v} = \begin{cases} |m \cdot \vec{v}| = \underset{\text{v.a.}}{|m|} \cdot \underset{\text{modulo}}{|\vec{v}|} \\ \text{verso} = \begin{cases} \text{verso } \vec{v} & \text{se } m > 0 \\ \text{verso contrario a } \vec{v} & \text{se } m < 0 \end{cases} \\ \text{direzione} = \text{direzione di } \vec{v} \end{cases}$$

(Somma) Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori. Possiamo assumere (a meno di una traslazione) che punto finale $\vec{u}$ = punto iniziale $\vec{v}$



Tali vettori coincidono con i lati di un parallelog.
Il vettore definito dalla diagonale di tale parallelogr.
definisca il vettore somma $\vec{u}+\vec{v}$

(prodotto scalare) Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori del piano. A meno di traslazione, supponiamo che punto iniziale $\vec{u}$ = punto iniziale $\vec{v}$



Tali vettori formano un angolo α tra di loro
si definisca il prodotto scalare

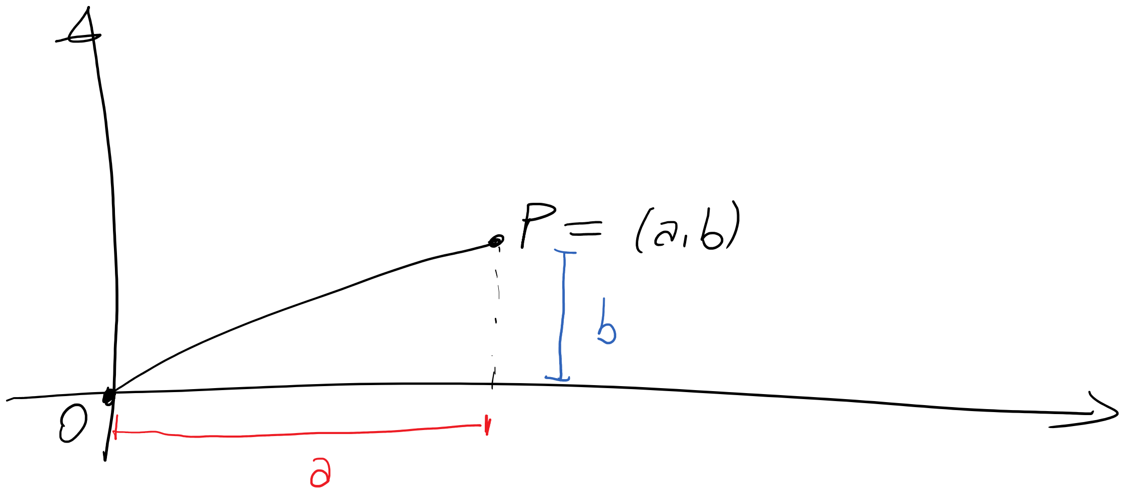
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha}$$

Dalla definizione

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

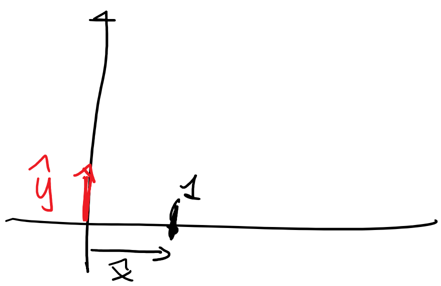
Sia $\vec{v}$ un vettore

Sia $\vec{v}$ un vettore con punto iniziale coincidente con l'origine di $\mathbb{R}^2$



Se considero $\hat{x}$ = versore dell'asse x

$$\hat{x} = (1,0)$$



$$\hat{y} = (0,1)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = a \cdot \hat{x} + b \cdot \hat{y}$$

Siano $\vec{v_1} = a_1 \hat{x} + b_1 \hat{y}$

$\vec{v_2} = a_2 \hat{x} + b_2 \hat{y}$

$$\Rightarrow \quad \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = (a_1 \hat{x} + b_1 \hat{y}) \cdot (a_2 \hat{x} + b_2 \hat{y})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = (a_1 \hat{x} + b_1 \hat{y}) \cdot (a_2 \hat{x} + b_2 \hat{y})$$

$$= a_1 \cdot a_2 \cdot |\hat{x}|^2 + \cancel{a_1 b_2 \hat{x} \cdot \hat{y}} + \cancel{b_1 a_2 \hat{y} \hat{x}} + b_1 \cdot b_2 \, |\hat{y}|^2$$

$\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$

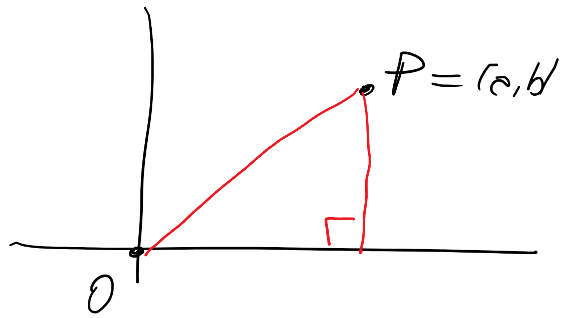
perché gli assi sono ortogonali.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}$$

~~Nota~~ : $\vec{v} = (a, b)$

$$|\vec{v}| = d(O, P)$$

$$\overset{\text{Pitagora}}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$$



Cenni di Geometria Analitica

Ricordo :

$$\vec{v_1} \perp \vec{v_2} \iff \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$$

$$\iff a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$ (condizione

$\Longleftrightarrow \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ (condizione di perpendicol.)

<u>Postulato</u> (Euclide) Fissato $P_0 \in \mathbb{R}^2$ e e un vettore $\vec{v}$ esiste una e una sola retta del piano passante per P_0 e perpendicolare a $\vec{v}$

Suppongo che $P_0 = (x_0, y_0)$

$$\vec{v} = (a, b) = a\hat{x} + b\hat{y}$$

Se $P = (x, y)$ allora Se r = retta che cerchiamo

$$P \in r \iff \overrightarrow{P_0 P} \perp \vec{v}$$

$$\iff \overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\iff (x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0$$

$$\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$\iff ax + by + \underbrace{(-ax_0 - by_0)}_{c} = 0$$

Scopro che $P = (x, y) \in r \iff ax + by + c = 0$

ossia l'insieme dei punti della retta r soddisfano un'eq.ne lineare di 1° grado in x e y

Vale anche il viceversa:

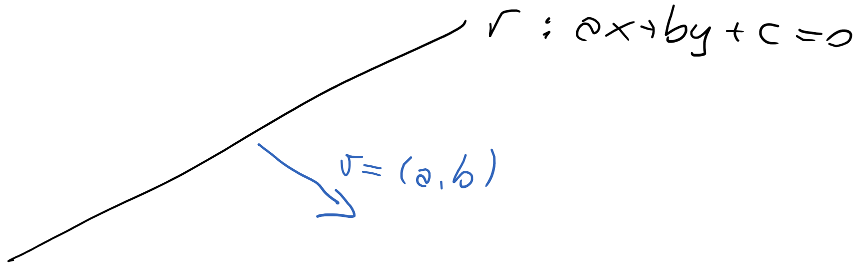
l'insieme dei punti del piano $P=(x,y)$ che verificano un'eq.ne di 1° grado $ax+by+c=0$ sono tutti e solo i punti di una retta

Abbiamo quindi una corrispondenza biunivoca tra rette del piano ed equazioni di 1° grado

Da ciò che abbiamo visto

se $ax+by+c=0$ è una retta

$\Rightarrow$ $\vec{v}=(a,b)$ è sempre vettore $\perp r$



Condizione di parallelismo tra rette

siano $r_1: a_1x+b_1y+c_1=0$

$r_2: a_2x+b_2y+c_2=0$

$$r_1 \parallel r_2 \iff \vec{v_1} = (a_1, b_1) \parallel \vec{v_2} = (a_2, b_2)$$

$$\iff \exists\, k \in \mathbb{R} \;(k \neq 0) : \begin{cases} a_2 = k\, a_1 \\ b_2 = k\, b_1 \end{cases}$$

se sostituisco all'equazione di r_2

$$r_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

$$k a_1 x + k b_1 y + c_2 = 0$$

divido per $k \neq 0$

$$\longrightarrow \quad r_2 : a_1 x + b_1 y + \frac{c_2}{k} = 0$$

$$r_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

le rette sono parallele se hanno stessi coefficienti di 1° grado

Condizione di perpendicolarità tra rette

Siano $\quad r_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$$r_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

$$r_1 \perp r_2 \iff \vec{v_1} = (a_1, b_1) \perp \vec{v_2} = (a_2, b_2)$$

$r_1 \perp r_2 \iff \vec{v_1} = (a_1, b_1) \perp \vec{v_2} = (a_2, b_2)$

$\iff \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$

$\iff \boxed{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0}$

caso particolare

$r_1 : \quad y = m_1 x + p_1$

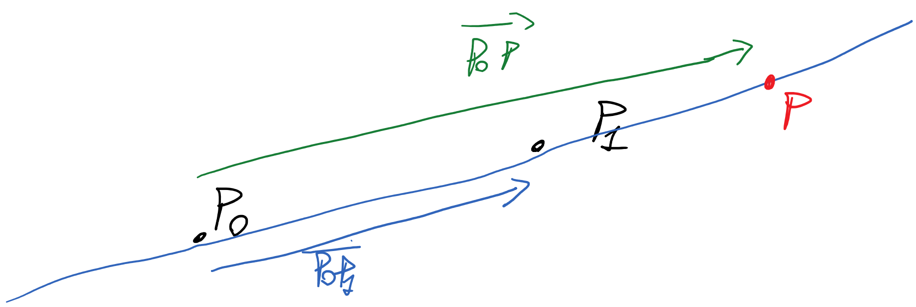
$r_2 : \quad y = m_2 x + p_2$

$r_1 \perp r_2 \iff \boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$

<u>Retta</u> <u>Passante</u> per due <u>punti</u>

<u>Postulato</u> (Euclide) Per due punti distinti del piano passa una ed una sola retta

Siano $P_0 = (x_0, y_0)$ $P_1 = (x_1, y_1)$



$P = (x, y) \in r \iff \vec{P_0P_1} \parallel \vec{P_0P}$

$P=(x,y)\in r \iff \overrightarrow{P_0P_1} \parallel \overrightarrow{P_0P}$

$\iff (x_1-x_0,\ y_1-y_0) \parallel (x-x_0,\ y-y_0)$

$\iff \exists\, k\in\mathbb{R},\ k\neq 0 : \begin{cases} x_1-x_0 = k(x-x_0) \\ y_1-y_0 = k(y-y_0) \end{cases}$

ricavando k dalla 1ª e 2ª ottengo

$$\boxed{\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}}$$

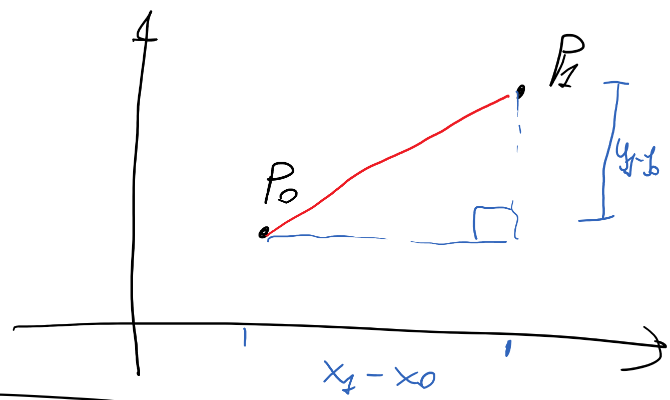
eq.ne retta passante per $P_0 P_1$

Distanze

1. Distanza tra punti

$P_0 = (x_0, y_0)$

$P_1 = (x_1, y_1)$



Pitagora $\boxed{d(P_0,P_1) = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}}$

(•) Distanza Punto retta

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto e $r: ax + by + c = 0$
per determinare la distanza tra P_0 e r

si considera prima la retta s passante per P_0
ortogonale a r

Sia $Q = r \cap s$

e si definisce $d(P_0, r) = d(P_0, Q)$

In generale la formula che determina tale
distanza è la seguente

$$\boxed{d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Circonferenze

si definisce circonferenza il luogo dei punti
del piano equidistanti da un punto fisso chiamato
centro

$P = (x, y) \in \Gamma$ (circonf.) $\iff$

$$d(P, C) = r > 0$$

se $C = (x_0, y_0)$

otteniamo $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$

$$\Longleftrightarrow \boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2}$$

equazione canonica della circonferenza

sviluppando:

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + (-2x_0)x + (-2y_0)y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$$

Se $a = -2x_0$

$b = -2y_0$

$c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$

l'eq.ne della circonferenza

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

ossia troviamo una corrispondenza biunivoca tra circonferenze del piano ed equazioni di 2°

grado di due variabili con coeff. di grado 2 pari a 1.

Viceversa: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Otteniamo che $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ è il centro della circonferenza

$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$ è il suo raggio

Rette tangenti ad una circonferenza

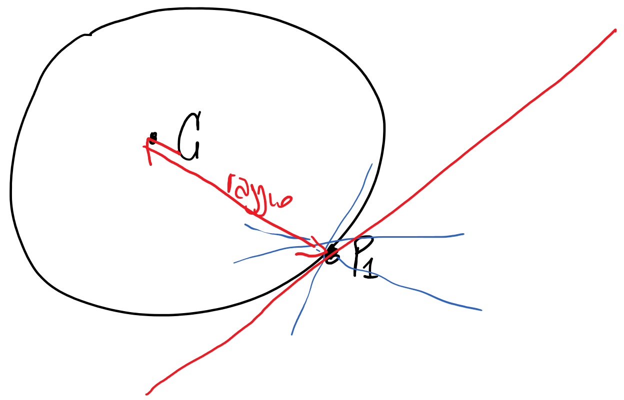
Sia $\mathcal{M}$ una circonferenza e r una retta. Diciamo che r è tangente a $\mathcal{M}$ se

$$r \cap \mathcal{M} = 1 \text{ solo punto}$$

Se ho $\mathcal{M}$ circonferenza di centro $C = (x_0, y_0)$ e raggio $r > 0$

e sia $P_1 \in \mathcal{M}$

Come trovare retta tangente a $\mathcal{M}$ in P_1



Considera la generica retta passante per $P_1 = (x_1, y_1)$

$$s: \boxed{a(y-y_1) + b(x-x_1) = 0} \quad (a, b \text{ sono generiche})$$

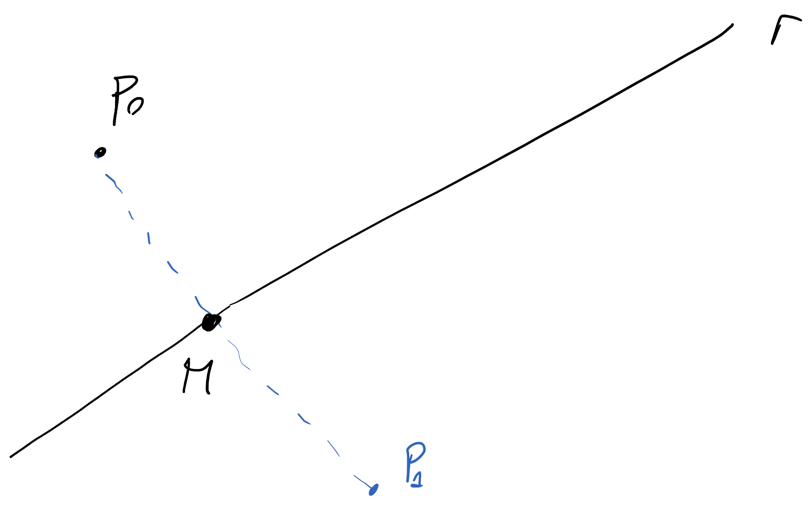
Nota che la retta s è tangente a M

$$\Longleftrightarrow \quad d(C, P_1) = d(C, s)$$

da cui l'equazione di s

<u>Punto</u> <u>simmetrico</u> risp. ad una <u>retta</u>

sia P_0 un punto e r retta



Per trovare il punto simmetrico P_1, considero la retta passante per P_0 $\perp$ r (retta s)

Considero $M = r \cap s$

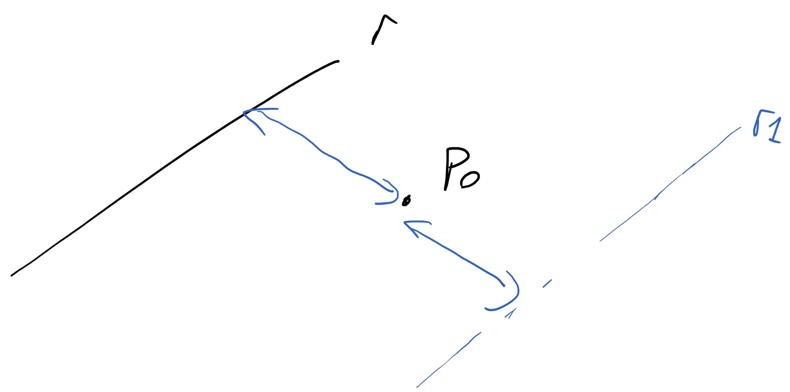
Infine noto che

Modo 1 $$d(P_0, M) = d(P_1, M)$$

Modo 2 $$M = \frac{P_0 + P_1}{2}$$

Analogamente, retta simmetrica rispetto ad un punto.

$r: ax + by + c = 0$ $P_0 = (x_0, y_0)$



Si definisca retta simmetrica ad r rispetto a P_0 come quella retta $//$ ad r tale che

$$d(r, P_0) = d(r_1, P_0)$$

Osservo che r_1 essendo $// \, r$

$$r_1 : ax + by + c_1 = 0 \quad \text{con } c_1 = ?$$

<u>Esercizio</u> Sia $A = (0, 4)$ e $r : x + 2y + 2 = 0$

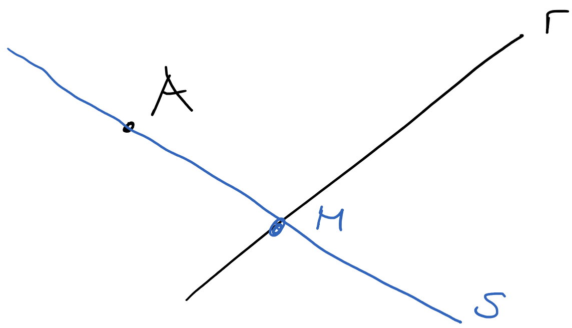
Trovare

(1) B simmetrico di A rispetto a r

(2) equazione della circonferenza $\mathcal{M}$ di centro A e tangente ad r

Svolgimento

(1)



$$r : x + 2y + 2 = 0$$

Se $s : ax + by + c = 0$

$$s \perp r \iff 1 \cdot a + 2 \cdot b = 0$$

$$a = -2b \qquad a, b \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad s: \quad -2bx + by + c = 0$$

Divido por $b \neq 0$

$$s: \quad -2x + y + \underbrace{\frac{c}{b}}_{c_1} = 0$$

$$\boxed{s: \quad -2x + y + c_1 = 0}$$

Impongo che s passa por $A = (0,4)$

$$\rightarrow \quad -2 \cdot (0) + (4) + c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -4$$

$$\boxed{s: -2x + y - 4 = 0}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ -2x + y - 4 = 0 \end{cases} \longrightarrow x = -2y - 2$$

$$-2(-2y-2) + y - 4 = 0$$

$$4y + \cancel{4} + y \cancel{-4} = 0$$

$$y = 0$$

$$x = -2$$

$$\Rightarrow \quad M = (-2, 0)$$

Se $B = (x, y) \in S: -2x + y - 4 = 0$

$y = 2x + 4$

$B = (x, 2x+4)$

Verifico $\frac{A+B}{2} = M = (-2, 0)$

$\frac{(0,4) + (x, 2x+4)}{2} = (-2, 0)$

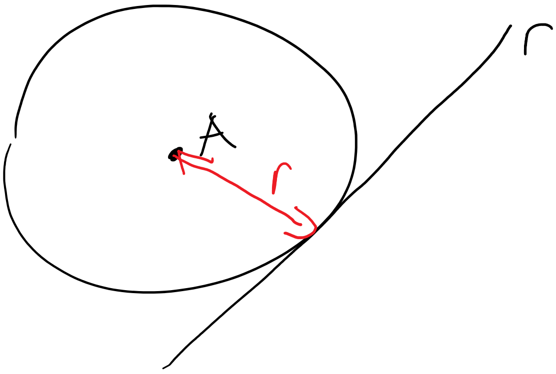
$\frac{(x, 2x+8)}{2} = (-2, 0)$

$\left(\frac{x}{2}, x+4\right) = (-2, 0)$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = -2 \\ x + 4 = 0 \end{cases} \longrightarrow x = -4$$

$\Longrightarrow B = (-4, -4)$

(2) eq$\underline{\text{ne}}$ circonferenza



$$r = d(A, r) = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot (4) + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$\Gamma : \quad (x-0)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2$$